Задача о лестницах или геометризация теоремы о распределении простых чисел

Баяк И. В.

Аннотация

В статье представлено вероятностное решение задачи о числе простых чисел меньших некоторого наперед заданного числа.

1 Условие задачи

Представьте себе человечка, способного шагать вверх по ступенькам приставной лестницы. Пусть нашему человечку по его требованию подставляют и оставляют стоять на месте бесконечно длинные лестницы, шаг которых (равный расстоянию между соседними ступеньками) кратен шагу человечка. С земли человечек запрыгивает на первую ступеньку лестницы, с шагом равным двум его шагам, однако далее при подъеме он каждый раз делает только по одному шагу, и при этом ставит ногу либо на первую ступеньку, затребованной им новой лестницы, либо на уже не первую ступеньку, поставленной ранее старой лестницы. Спрашивается, сколько потребуется человечку лестниц, чтобы подняться на высоту N его шагов, если N достаточно велико.

2 Решение

Прежде всего заметим, что шаг, затребованных человечком лестниц, всегда равен простому числу. Действительно, измеряемая числом шагов высота ступеньки установленной лестницы, на которую человечек может поставить ногу, кратна шагу одной из уже поставленных лестниц, а следовательно высота ступеньки, на которую он не может поставить ногу из-за отсутствия лестницы, не кратна шагу ни одной из поставленных лестниц, и поэтому не делится на высоту ни одной из нижележащих ступенек.

Пусть человечек стоит на высоте N его шагов. Тогда вероятность того, что на высоте m шагов, где $m > N$, нет ступеньки лестницы с простым шагом p, где $p < N+1$, равна $1 - 1/p$, а вероятность того, что там нет ступеньки ни одной из уже поставленных лестниц, вычисляется по формуле:

$$P(m > N) = \prod_{p<N+1} (1 - 1/p) \quad . \tag{2.1}$$

Иначе говоря, $P(m > N)$ есть вероятность того, что если высота m в диапазоне $[N+1, N^2]$, то m простое число, а если в диапазоне $[N^2+1, \infty[$, то число m не составлено из произведений простых чисел меньших или равных числу N.

Воспользуемся теперь разложением

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots \quad , \tag{2.2}$$

чтобы преобразовать произведение 2.1 в обратную сумму:

$$\prod_{p<N+1} (1 - 1/p) = \frac{1}{\sum\limits_{n \le N} \frac{1}{n} + \sum\limits_{m>N} \frac{1}{m}} \quad , \tag{2.3}$$

где n и m составлены из произведений простых чисел меньших или равных числу N, в силу чего n пробегает от единицы до N все числа натурального ряда, а m пробегает от $N+1$ до N^2 все составные числа, но от N^2 до бесконечности только малую часть составных чисел натурального ряда, состоящих из произведений простых чисел меньших или равных числу N. А поскольку нас интересует вероятность того, что число $(N+1)$ простое, то для преобразования широкодиапазонной вероятности $P(m > N)$ в локальную вероятность $P(N+1)$, необходимо в обратной сумме 2.3 избавиться от суммы $\sum\limits_{m>N} \frac{1}{m}$, и тогда мы получим формулу:

$$P(N+1) = \frac{1}{\sum\limits_{n \le N} \frac{1}{n}} \quad , \tag{2.4}$$

которая при достаточно большом N трансформируется в выражение:

$$P(N+1) \approx \frac{1}{\ln N} \quad . \tag{2.5}$$

Найдем теперь приращение ΔN, ширина которого достаточна для достоверного попадания в отрезок $[N+1, N+\Delta N]$ одного простого числа. Для этого нам необходимо решить уравнение:

$$P(N+1) + P(N+2) + \cdots + P(n+\Delta N) = 1 \quad , \tag{2.6}$$

которое в силу 2.5 приближается интегральным уравнением:

$$\int\limits_{N}^{N+\Delta N} \frac{dt}{\ln t} = 1 \quad . \tag{2.7}$$

Пусть в разложении

$$\int\limits_{2}^{N} \frac{dt}{\ln t} = \int\limits_{2}^{2+\Delta} \frac{dt}{\ln t} + \int\limits_{2+\Delta}^{2+\Delta+\Delta'} \frac{dt}{\ln t} + \cdots + \int\limits_{N-\Delta''}^{N} \frac{dt}{\ln t} \tag{2.8}$$

все приращения удовлетворяют уранению 2.7, в силу чего каждый член разложения 2.8 равен единице. Тогда справедливо выражение:

$$\pi(N) = \int\limits_{2}^{N} \frac{dt}{\ln t} \quad , \tag{2.9}$$

где $\pi(N)$ – количество простых чисел, попадающих в отрезок $[2, N]$. Таким образом, формула 2.9 завершает решение задачи о количестве лестниц, необходимых человечку для подъема на высоту N.

Список литературы

[1] Борель Э., Вероятность и достоверность, Наука, 1969

[2] Трост Э., Простые числа, ГИФЛ, 1959