Эссе о тяготении

Баяк И. В.

Аннотация

В данной работе представлена модель гравитации, псевдориманова метрика которой индуцирована векторным полем скоростей сплошной среды пространства Минковского. Геометрия модели основана на отображении накрытия цилиндрического многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$ пространством Минковского. Постоянное единичное векторное поле пространства Минковского, линии тока которого отображаются в винтовые линии цилиндра, мы сопоставляем с нулевым (вакуумным) состоянием, а гиперболический угол отклонения произвольного минимального векторного поля от направления, выделенного вакуумным состоянием, мы сравниваем с гравитационным потенциалом. Топологические особенности векторного поля цилиндра, имеющие замкнутые линии тока, служат источником возмущения вакуума, и поэтому являются главным предметом нашего обсуждения. В работе показано, что данные топологические особенности имеют сходство как с материальными точками так и с квантовыми частицами.

1 Введение

Мы рассмотрим геометрические и динамические аспекты одной математической конструкции, призванной дать интерпретацию гравитации, а затем сравним ее с общепринятыми физическими теориями тяготения Ньютона и Эйнштейна. Поскольку это математическое построение основано на концепции движущейся материи, то воображаемые сущности нашей теории вполне материальны. В качестве общих посылок, предшествующих данной работе, назовем гидродинамический подход к гравитации Дж. Биркгофа [5], идею О. Клейна [6] о компактификации лишнего измерения и работу Ю. Б. Румера [7] о геометрическом толковании действия.

Более полное представление о воображаемом механизме тяготения дает обращение к динамике единичного векторного поля скоростей частичек потока движущейся материи, заданного на цилиндрическом многообразии $\mathbb{R}^3 \times S^1$, однако для наглядности мы сначала рассмотрим течение жидкости по поверхности цилиндра $\mathbb{R}^1 \times S^1$. Если в качестве линейной траектории частички жидкости принять произвольную винтовую линию цилиндра, то в качестве квадрата протяженности отрезка линейной траектории можно взять произведение длины проекции отрезка траектории на образующую прямую и длины намотки отрезка траектории на задающую окружность цилиндра. Тогда квадрат протяженности линейного отрезка траектории частички будет задаваться формулой

$$l^2 = \omega r T \cdot vT = \omega r v T^2 \tag{1.1}$$

где r - радиус цилиндра, ω - угловая скорость, v - поступательная скорость, - T - интервал времени движения частички по поверхности цилиндра. А поскольку у нас в модели предполагается единичное векторное поле скоростей частичек жидкости, то

$$l/T = \sqrt{\omega r v} = 1 \tag{1.2}$$

В результате такой интерпретации, протяженность направленного отрезка линейной траектории частички жидкости будет равна длине соответствующего вектора псевдоевклидовой плоскости, полученной накрытием цилиндра плоскостью таким образом, чтобы одно семейство изотропных прямых плоскости отображалось в образующие прямые, а другое – в задающие окружности цилиндра. Действительно, если $\omega r T = x + t$, а $vT = x - t$, где (x, t) - координаты частички жидкости на псевдоевклидовой плоскости, измеренные в конечный момент времени T, то $l^2 = x^2 - t^2$. Вместе с тем, если псевдоевклидову плоскость (x, t) равномерно наматывать на цилиндр так, чтобы изотропные прямые $t + x = \tau$ ложились на образующие прямые цилиндра, то τ может служить эволюционным параметром динамически изменяющегося векторного поля цилиндра. Поэтому динамику векторного поля цилиндра следует описывать статическим единичным векторным полем псевдоевклидовой плоскости.

Динамический закон движения потока жидкости, текущей по поверхности цилиндра, можно сформулировать как условие, которому должна удовлетворять связанная с этим потоком функция, заданная на псевдоевклидовой плоскости. Действительно, поскольку нас интересует гравитационный потенциал материальной точки с массой m, который мы интерпретируем как гиперболический угол $\varphi(x, t)$ отклонения векторного поля $g(x, t)$ от направленного по оси t единичного вектора c, то пусть функция гиперболического угла $\varphi(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{dx^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{dt^2} = m\delta(x). \tag{1.3}$$

Простейшим статическим (независимым от t) фундаментальным решением уравнения 1.3 является угловой потенциал

$$\varphi = \frac{m|x|}{2}, \tag{1.4}$$

который имеет особенность в точке $x = 0$. Поскольку уравнение 1.3 не меняется при псевдоевклидовых поворотах редуцированного пространства Минковского (x, t), то траектории свободного движения материальной точки соответствует одномерная особенность, сосредоточенная на оси t', полученной произвольным гиперболическим поворотом оси t. Пусть ускорение такой особенности определяется внешним потенциалом (потенциалом остальных особенностей) согласно формуле

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{1.5}$$

Тогда взаимодействие особенностей углового потенциала будет характеризоваться их взаимным притяжением, что позволяет нам сопоставить их с материальными точками, которые наблюдатель видит на оси x. Впрочем, если не постулировать положение об ускорении особенности, то динамическое поведение особенностей $x_1(t)$, $x_2(t)$ должно определяться уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = m_1 \delta(x - x_1(t)) + m_2 \delta(x - x_2(t)), \tag{1.6}$$

которое в начальный момент $t = 0$ при статическом приближении $\varphi(x, 0) \approx \varphi(x, \Delta t)$ трансформируется в уравнение

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = m_1 \delta(x - x_1) + m_2 \delta(x - x_2), \tag{1.7}$$

доставляющее начальное граничное решение уравнения 1.6.

В дальнейшем геометрия нашей модели изменяется так, что вместо цилиндра мы рассматриваем его расширение $\mathbb{R}^1 \times S^1 \times S^1$. В таком случае, выражение 1.1 для квадрата протяженности линейного отрезка траектории частичек жидкости должно быть заменено на выражение для куба протяженности:

$$l^3 = \omega_1 r_1 T \cdot vT \cdot \omega_2 r_2 T. \tag{1.8}$$

Откуда с учетом 1.2 имеем выражение для протяженности линейного отрезка траектории в пространстве $\mathbb{R}^1 \times S^1 \times S^1$:

$$l = \sqrt[3]{\omega_2 r_2} \cdot T. \tag{1.9}$$

А поскольку для классического действия свободного движения материальной точки справедлива формула:

$$S_{cl} = ms, \tag{1.10}$$

то при выполнении равенства:

$$m = \sqrt[3]{\omega_2 r_2} \tag{1.11}$$

из 1.9 и 1.10 следует, что интервал абсолютного времени T равен интервалу s событй в редуцированном пространстве Минковского, а протяженность l линейной траектории в пространстве $\mathbb{R}^1 \times S^1 \times S^1$ равна классическому действию S_{cl} свободного движения материальной точки. Далее, в связи с необходимостью учета квантовых эффектов, из классического действия $S_{cl} = l$ мы конструируем функцию квантового действия

$$\Psi(S_{cl}) = e^{i\frac{\pi}{h}S_{cl}}, \tag{1.12}$$

где h – длина окружности Вилларсо тора $S^1 \times S^1$, которая отображает траекторию векторного поля особенности на окружность Вилларсо. Заметим при этом, что на пространство $\mathbb{R}^1 \times S^1 \times S^1$ мы наматываем трехмерное линейное финслерово пространство Бервальда-Моора (x, t, z), причем на тор $S^1 \times S^1$ наматывается псевдоевклидова плоскость (z, t), где прообраз окружности Вилларсо совпадает с осью z.

Однако, несмотря на привлекательность очевидных физических аналогий, вернемся все же к динамике потоков цилиндрического многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$. В статье показано, что его накрытием служит псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{1,3}$, и поэтому динамические потоки цилиндрического многообразия могут быть представлены статической функцией, заданной на пространстве Минковского. Решая вариационное уравнение для функционала объема (массы) жидкости, протекающей через произвольную область евклидова подпространства $\mathbb{R}^3$ цилиндра $\mathbb{R}^3 \times S^1$, мы показываем, что векторное поле скоростей частичек жидкости $g(x, t)$, заданное в пространстве $\mathbb{R}^{1,3}$, должно быть голономным и минимальным, т.е. ортогональные к нему поверхности должны иметь нулевую среднюю кривизну.

Следует однако отметить, что квазиньютоново описание нашей модели гравитации не является единственно возможным, а есть всего лишь взгляд на нее со стороны абсолютного наблюдателя. Если же мы посмотрим на нее с точки зрения реального наблюдателя, то вынуждены будем прибегнуть к квазиэйнштейнову описанию. В статье показано, что для измерения локальных пространственных координат и времени реальный наблюдатель в отличии от абсолютного наблюдателя использует не выделенный с помощью вакуумного векторного поля c ортонормированный базис пространства Минковского, а ортогональный репер, выделенный с помощью векторного поля $g(x,t)$ и нормированный гиперболическим углом $\varphi(x,t)$ между $g(x,t)$ и c. Поскольку репер реального наблюдателя нормирован не на единичную длину пространства Минковского, а на единичные координаты цилиндра, то масштаб пространственных и временных координат реального наблюдателя зависит от модуля $|g(x,t)|$ и от гиперболического угла между $g(x,t)$ и c, в силу чего реальный наблюдатель видит не плоское пространство Минковского а псевдориманово многообразие, индуцированное векторным полем $g(x,t)$.

В данной статье мы используем сферические координаты евклидова пространства, отличающиеся от классических тем, что широта у них измеряется по модулю 2π, а долготы — по модулю π. Иначе говоря, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ приняты сферические (полярные) координаты ρ, φ, $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2}$, которые связаны с декартовыми координатами $x_1,\ldots,x_n$ формулами:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi,\\
x_2 &= \rho\sin\varphi\cos\vartheta_1,\\
x_3 &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2,\\
&\ldots\ldots\\
x_{n-1} &= \rho\sin\varphi\cdots\sin\vartheta_{n-3}\cos\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \rho\sin\varphi\cdots\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},
\end{aligned}$$

где $0\le\rho<\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\vartheta_i<\pi$.

Обращаем также ваше внимание на то, что в данной статье под проективным пространством RP^n понимается пространство центрально-симметричных прямых линий пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. факторпространство пространства $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ по отношению эквивалентности $x\sim rx$, где $r\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2 Геометрия модели

Геометрия модели основана на таких простых математических понятиях как отображение намотки сферы S^2 евклидовой плоскостью и отображение намотки цилиндра $\mathbb{R}\times S^1$ и тора $S^1\times S^1$ псевдоевклидовой плоскостью.

Пусть на евклидовой плоскости заданы полярные координаты (φ,ρ), а сфера имеет угловые координаты (θ,ϕ) долготы и широты соответственно. Тогда, если задать соответствие, использующее классы сравнений по модулю π и 2π,

$$\theta = |\varphi| \mod \pi, \quad \phi = |\pm\pi\rho| \mod 2\pi, \tag{2.1}$$

где знак + берется для $0 \le \varphi < \pi$ а знак − для $\pi \le \varphi < 2\pi$, то мы получим простое отображение евклидовой плоскости на сферу. В самом деле, если исходить из определения проективной прямой как совокупности центрально-симметричных прямых плоскости, то будет понятно, что евклидова плоскость порождается произведением $RP^1 \times \mathbb{R}$, в котором в качестве компоненты $\mathbb{R}$ следует взять евклидову прямую, т.е. прямую, не допускающую ни деформаций ни отражений. В свою очередь, поскольку в касательной плоскости сферы мы также можем задать пространство неориентированных направлений, то сфера порождается произведением $RP^1 \times S^1$, в котором все окружности отождествляются в двух своих противоположных точках. Следовательно, в отображении намотки плоскости на сферу все центрально-симметричные евклидовы прямые наматываются на соответствующие им окружности сферы в соответствии с отображением:

$$\mathbb{R} \to S^1 : e^{i\pi x} = e^{\pm i\pi\rho} \tag{2.2}$$

Отображение намотки евклидова пространства на сферу допускает расширение в произвольную размерность, но мы обращаем ваше внимание лишь на тот случай, когда 3-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ порождается произведением $RP^2 \times \mathbb{R}$, а 3-мерная сфера порождается произведением $RP^2 \times S^1$, где на них наложены такие же метрические и топологические условия, т.е. требование евклидовой жесткости всех прямых и отождествления всех окружностей в двух противоположных точках. Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ наматывается на S^3 таким же естественным образом, т.е. по аналогии с 2.1. Действительно, для этого требуется длине радиус–вектора евклидова пространства поставить в соответствие угловую координату сферы, которая измеряется по модулю 2π, т.е. широту. Иначе говоря, достаточно принять, что

$$\theta_1 = \vartheta, \quad \theta_2 = |\varphi| \mod \pi, \quad \phi = |\pm\pi\rho| \mod 2\pi, \tag{2.3}$$

где выбор знака обусловлен координатой широты евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Пусть теперь на псевдоевклидовой плоскости с координатами (x_0, x_1) задан ортонормированный базис (e_0, e_1), а цилиндр $\mathbb{R} \times S^1$ имеет координаты (ϕ, r). Тогда самым простым отображением псевдоевклидовой плоскости на цилиндр является соответствие $\phi = |\pi(x_0 + x_1)| \mod 2\pi$,

$r = x_0 - x_1$, т.е. такое отображение, которое одну изотропную прямую наматывает на направляющую окружность цилиндра, а вторую изотропную прямую отождествляет с образующей цилиндра. Действительно, в таком случае всякому ненулевому (неизотропному) вектору плоскости можно поставить в соответствие определенную координату цилиндра. Так, если вектор x с координатами (x_0, x_1) образует гиперболический угол φ с осью x_0, то

$$\phi = | \pm \pi e^{-\varphi} \rho| \mod 2\pi = |\pi(x_0 + x_1)| \mod 2\pi, \tag{2.4}$$

если же вектор x образует гиперболический угол φ с осью x_1, то

$$r = \pm e^{\varphi} \rho = x_0 - x_1, \tag{2.5}$$

где $\varphi = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x_0+x_1}{x_0-x_1} \right| = -\ln \left| \frac{x_0+x_1}{\rho} \right|$, $\rho = \left|(x_0 + x_1)(x_0 - x_1)\right|^{1/2}$. Аналогично строится отображение намотки тора псевдоевклидовой плоскостью. Отличие лишь в том, что вторая изотропная прямая наматывается на вторую задающую окружность тора.

Пусть теперь дано 4-мерное псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ с сигнатурой $(-,+,+,+,)$ его базиса (e_0, e_1, e_2, e_3). Тогда у нас есть возможность намотать $\mathbb{R}^{1,3}$ либо на цилиндр $\mathbb{R}^3 \times S^1 \cong (RP^2 \times \mathbb{R}) \times S^1$, либо на цилиндр $S^3 \times \mathbb{R} \cong (RP^2 \times S^1) \times \mathbb{R}$, либо на произведение $S^3 \times S^1$. Например, для того, чтобы намотать пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ на цилиндр $\mathbb{R}^3 \times S^1$, необходимо взять в $\mathbb{R}^{1,3}$ произвольную псевдоевклидову плоскость, проходящую через ось x_0 и произвольную прямую x_k, ортогональную вектору e_0. Затем плоскость (x_k, x_0) необходимо намотать на соответствующий цилиндр с координатами (ϕ, r_k), причем, поскольку индекс k является элементом проективного пространства RP^2, то, пробегая все возможные плоскости, мы получим искомое отображение намотки:

$$\phi = | \pm \pi e^{-\varphi} \rho| \mod 2\pi = |\pi(x_k + x_0)| \mod 2\pi, \tag{2.6}$$

$$r_k = \pm e^{\varphi} \rho = x_k - x_0. \tag{2.7}$$

Аналогично, для отображения $\mathbb{R}^{1,3}$ на цилиндр $S^3 \times \mathbb{R}$ мы используем выражения:

$$\phi_k = | \pm \pi e^{\varphi} \rho| \mod 2\pi = |\pi(x_k - x_0)| \mod 2\pi, \tag{2.8}$$

$$r = \pm e^{-\varphi} \rho = x_k + x_0. \tag{2.9}$$

Таким образом, мы получили отображения частичной компактификации пространства $\mathbb{R}^{1,3}$ в цилиндрическое многообразие $\mathbb{R}^3 \times S^1$ и $S^3 \times \mathbb{R}$, но ничто не мешает нам получить отображение полной компактификации пространства $\mathbb{R}^{1,3}$ в произведение сфер $S^3 \times S^1$.

Обратимся теперь к вопросу о сравнении базисов псевдоевклидовой плоскости, намотанной на цилиндр. Хорошо известно, что все ортонормированные базисы псевдоевклидовой плоскости эквивалентны, и поэтому нет никакой возможности выделить какой-то один базис из этого класса как эталонный. Однако, если на псевдоевклидовой плоскости задать постоянное единичное векторное поле c, то можно получить выделенный ортонормированный базис (e_0, e_1), где e_0=c. В свою очередь, переменное векторное поле $g(x)$ длины $\rho(g(x)) = e^{\varphi(x)}$, составляющее гиперболический угол $\varphi(x)$ с векторным полем c, индуцирует в каждой точке псевдоевклидовой плоскости, намотанной на цилиндр, ортогональный репер, нормированный цилиндрическими координатами. Действительно, имея в виду ортонормированность репера $(e'_0(x), e'_1(x))$, где $e^{\varphi(x)}e'_0(x) = g(x)$, и нормируя орт $e'_0(x)$ азимутальной цилиндрической координатой (равной π):

$$\pi = |\pm \pi e^{-\varphi}\rho(e^{\varphi}e'_0)| \mod 2\pi = |\pm \pi e^{-\varphi}\rho(g_0)| \mod 2\pi, \tag{2.10}$$

а орт $e'_1(x)$ — линейной цилиндрической координатой (равной 1):

$$1 = e^{\varphi}\rho(e^{-\varphi}e'_1) = e^{\varphi}\rho(g_1), \tag{2.11}$$

мы получим из ортонормированного репера $(e'_0(x), e'_1(x))$ ортогональный репер $(g_0(x), g_1(x))$, нормированный в соответствии с формулами:

$$\rho(g_0(x)) = e^{\varphi}\rho(e'_0(x)) = e^{\varphi}\rho(e_0), \tag{2.12}$$

$$\rho(g_1(x)) = e^{-\varphi}\rho(e'_1(x)) = e^{-\varphi}\rho(e_1). \tag{2.13}$$

Тем самым, векторное поле $g(x)$ индуцирует на псевдоевклидовой плоскости, намотанной на цилиндр, 2–мерное псевдориманово многообразие с метрическим тензором g_{ij}, где $i, j = 0, 1$, равным матрице Грама системы векторов $(g_0(x), g_1(x))$ или $(e^{\varphi}e_0, e^{-\varphi}e_1)$. Аналогично, единичное векторное поле $g(x)$, заданное в пространстве $\mathbb{R}^{1,3}$, намотанном на цилиндр $\mathbb{R}^3 \times S^1$, индуцирует 4–мерное псевдориманово многообразие. Действительно, достаточно взять ортонормированный репер (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3), полученный гиперболическим поворотом пространства $\mathbb{R}^{1,3}$ на угол $\varphi(x)$ в плоскости $(g(x), c)$ и евклидовыми поворотами, помещающими в эту же плоскость орт e_1. Тогда матрица Грама g_{ij}, где $i, j = 0, 1, 2, 3$, системы векторов $\{e^{\varphi}e'_0, e^{-\varphi}e'_1, e'_2, e'_3\}$ будет служить метрикой соответствующего псевдориманова многообразия.

3 Динамика модели

В качестве материального (и одновременно метафизического) содержания модели мы используем представление о динамике единичного по модулю векторного поля $u(x,\tau)$ скоростей частичек движущейся материи, заданного на поверхности цилиндра $\mathbb{R}^3 \times S^1$. Динамика векторного поля $u(x,\tau)$ определяется принципом максиимальности 4-объема, переносимого потоком частичек движущейся материи за некоторое конечное время T через произвольную область Σ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с заданными начальными и граничными условиями, а именно:

$$\delta \int_0^T \int_\Sigma dV \wedge u(x,\tau) d\tau = 0, \tag{3.1}$$

где dV – дифференциальный элемент объема 3-поверхности Σ. Иначе говоря, мы постулируем принцип максимальности массы частичек, переносимых потоком движущейся материи через поверхность измерения (поверхность наблюдателя, лежащую в $\mathbb{R}^3$), за конечный промежуток времени.

Вместе с тем, поскольку отображение намотки пространства $\mathbb{R}^{1,3}$ на цилиндр $\mathbb{R}^3 \times S^1$ позволяет динамическую задачу на цилиндре свести к статической задаче в пространстве $\mathbb{R}^{1,3}$, то принципу максимальности 4-объема динамического потока, заданного на цилиндрическом многообразии векторным полем $u(x,\tau)$, соответствует принцип максимальности 4-объема потока, заданного в пространстве $\mathbb{R}^{1,3}$ единичным по модулю векторным полем $g(x)$, а именно:

$$\delta \int_0^{x_0} \int_{\Sigma'} dV \wedge g(x) dx_0 = 0, \tag{3.2}$$

где нулевой орт совпадает с вектором c, определяющим постоянное (вакуумное) векторное поле, а все 3-поверхности наблюдателя Σ' лежат в ортогональных к c евклидовых подпространствах пространства $\mathbb{R}^{1,3}$.

Пусть теперь в $\mathbb{R}^{1,3}$ задан такой ортонормированный базис $(c_i) = (c_0, c_1, c_2, c_3)$, что $c_0 = c$, и пусть там также задано такое реперное расслоение, что каждой неособой точке поставлен в соответствие неортонормированный репер $(g_i(x)) = (g_0, g_1, g_2, g_3)$, где $g_0 = g(x)$, $g_1 = c_1$, $g_2 = c_2$, $g_3 = c_3$. Из скалярного произведения (c_i, g_j) пар векторов базиса (c_i) и репера (g_i) сформируем матрицу (g_{ij}) и вычислим ее определитель $\det(g_{ij})$, модуль которого равен объему параллелепипеда, образованного системой векторов $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$, и одновременно равен скалярному произведению $(g(x), c)$. Вместе с тем, имеет место равенство $(g(x), c)^2 = |\det G(x)|$, где

$G(x)$ — матрица Грама системы векторов $(g_i(x))$. Следовательно уравнение 3.2 эквивалентно вариационному уравнению:

$$\delta \int_{\Omega} (g(x), c) d^4x = \delta \int_{\Omega} |\det G(x)|^{\frac{1}{2}} d^4x = 0, \tag{3.3}$$

где d^4x есть дифференциальный элемент объема 4-мерной цилиндрической области Ω пространства $\mathbb{R}^{1,3}$, которая имеет высоту T а в качестве ее основания используется 3-поверхность Σ с граничным начальным условием $g(x) = c$. Для того чтобы получить дифференциальное уравнение, которое удовлетворяет интегральному вариационному уравнению 3.3, мы должны локализовать область интегрирования Ω. Пусть в некоторой точке пространства $\mathbb{R}^{1,3}$ даны предельно малый параллелепипед $\Delta\pi$, построенный на векторах $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, и векторная трубка ω, основание которой составляет грань параллелепипеда, образованная векторами $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, а ее объем заполнен линиями тока векторного поля $g(x)$. Тогда, в результате локализации уравнения 3.3, мы получим вариационное уравнение:

$$\delta \int_{\Delta\pi} |\det G(x,t)|^{\frac{1}{2}} d^4x = \delta \operatorname{Vol} \omega = 0. \tag{3.4}$$

Но поскольку линии тока неголономных векторных полей не параллельны даже локально, то локальным шевелением (вариацией) неголономного поля $g(x)$, увеличивающим или уменьшающим его неголономность, мы получим ненулевую вариацию объема $\operatorname{Vol}\omega$. В то же время, вариации голономного поля $g(x)$ не нарушают его локальную параллельность, и поэтому голономность векторного поля $g(x)$ доставляет необходимое условие для нулевой вариации объема $\operatorname{Vol}\omega$. Достаточным условием нулевой вариации объема векторной трубки ω является требование минимальности поверхностей, ортогональных голономному векторному полю $g(x)$, которое на языке дифференциальных форм выражается уравнением:

$$d \star g^*(x) = 0, \tag{3.5}$$

где d — внешний дифференциал, $\star$ — оператор Ходжа.

Однако, надо понимать, что если мы хотим получить вариационное уравнение, связанное с реальным наблюдателем, то должны определить его в псевдоримановом многообразии M, индуцированном векторным полем $g(x)$. Метрика многообразия M задается матрицей Грама системы из четырех касательных векторов, а именно: касательной к линии тока $x_0'(\phi)$, параметризованной угловой координатой цилиндрического многообразия, и трех касательных к координатным линиям ортогональной

3-поверхности $x_1'(r), x_2'(r), x_3'(r)$, параметризованным евклидовой длиной цилиндрического многообразия. В псевдоримановом многообразии M уравнению 3.4 следует сопоставить уравнение:

$$\delta \int_{\Delta M} R dV = 0 \tag{3.6}$$

где R – скалярная кривизна, dV – дифференциальный элемент объема многообразия M.

Вернемся, однако, к точке зрения абсолютного наблюдателя и обратимся к динамике особенностей векторного поля $g(x)$. Пусть в простанстве Минковского траектория особенности $X(\tau)$, параметризованная абсолютным временем и имеющая единичную по модулю скорость $\dot{X}$, определяется вариационным уравнением:

$$\delta \int_{X(0)}^{X(T)} (g^*(x), dx) = \delta \int_0^T (g(x), \dot{X}) d\tau = 0, \tag{3.7}$$

где траектория особенности $X(\tau)$ варьируется в пространстве Минковского, в котором задано внешнее векторное поле $g(x)$. Заметим при этом, что в псевдоримановом многообразии M, индуцированном векторным полем $g(x)$, уравнению 3.7 соответствует вариационное уравнение

$$\delta \int_l dl = 0, \tag{3.8}$$

где варьируется мировая линия, т.е. собственное время особенности. Вместе с тем, если в интегральном уравнении 3.7 взять малый интервал времени, то оно сводится к уравнению:

$$\ddot{X} = \nabla\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt, \tag{3.9}$$

которое означает, что касательный к траектории вектор должен сохранять гиперболический угол наклона к внешнему векторному полю. Возьмем теперь в евклидовом подпространстве пространства Минковского ортогональную проекцию ускорения траектории особенности $\ddot{x}(\tau) = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^3} \ddot{X}(\tau)$. Тогда из уравнения 3.9 получается простое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}(\tau) = \nabla\varphi(x), \tag{3.10}$$

которое в классической механике Ньютона означает, что ускорение материальной точки во внешнем гравитационном поле не зависит от ее массы.

4 Некоторые следствия модели

Посмотрим теперь как в классическом приближении видится мир реальному наблюдателю. Реальный наблюдатель в пространстве Минковского, не видит ни определяющего абсолютный вакуум вектора c, ни единичного векторного поля $g(x)$, ни его отклонений от вектора c, но он видит, что ускорением материальных точек в пространстве наблюдателя можно измерить градиент скалярного поля гравитации. Кроме того, реальный наблюдатель, помещенный во внешнее скалярное поле, сможет обнаружить псевдориманово многообразие, индуцированное единичным векторным полем $g(x)$. Действительно, если он измерит масштабы времени и расстояний в точках пространства наблюдателя с разными значениями скалярного поля, то заметит деформацию этих масштабов. Тем самым, реальному наблюдателю представляется, что скалярное поле является причиной деформации плоского псевдоевклидова пространства, превращающей его в псевдориманово многообразие, причем он видит, что локальная деформация многообразия устраняется ускорением материальных точек, откуда он делает вывод, что их траектории есть геодезические этого многообразия.

Таким образом, мы построили модель, в которой динамика топологической особенности соответствует динамике материальной точки в поле тяготения. Кроме того, статический потенциал топологической особенности, согласованный с индуцированной им метрикой, свпадает с ньютоновым потенциалом материальной точки. Действительно, на расстоянии r от центра центральносимметричного скалярного поля $\varphi = \frac{m}{r}$ особенности индуцированная им метрика равна:

$$ds^2 = e^{2\varphi}dt^2 - e^{-2\varphi}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{4.1}$$

что в силу приблизительного равенства $e^{2\varphi} \approx 1 + 2\varphi$, справедливого при малых значениях φ, соответствует метрическому тензору гравитационного поля материальной точки. Вместе с тем, наряду со следствиями локального характера, наша модель обладает еще и некоторыми глобальными свойствами, например, если предположить, что вакуумное векторное поле c эволюционирует и при этом гиперболический угол между вакуумным векторным полем в начальный и настоящий момент эволюции линейно зависит от времени эволюции $\varphi(\tau) = H\tau$, тогда константу H мы можем связать с космологическим фактором, в котором легко угадывается постоянная Хаббла.

Расширим теперь геометрию базовой модели до геометрии пространства $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^1$. Ранее на примере пространства $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ мы показали, что на это пространство наматывается линейное финслерово пространство (x, t, z) с кубической метрикой. В свою очередь, на его подпространства $\mathbb{R} \times S^1$, $S^1 \times S^1$ наматываются псевдоевклидовы плоскости, обладающие квадратичной метрикой. Следовательно в финслеровом пространстве (x, t, z) сохраняются квадратичные формы:

$$x^2 - t^2, \quad x^2 - z^2, \quad z^2 - t^2. \tag{4.2}$$

Аналогично, на пространство $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^1$ наматывается линейное финслерово пространство (x_1, x_2, x_3, t, z) с кубической метрикой, которая сохраняет квадратичные формы:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2, \tag{4.3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - z^2, \tag{4.4}$$

$$z^2 - t^2. \tag{4.5}$$

Обратимся теперь к динамике векторного поля $u(x)$ потока движущейся материи, заданного в пространстве $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^1$. Пусть в финслеровом пространстве (x_1, x_2, x_3, t, z) векторному полю $u(x)$ соответствует единичное векторное поле $g(x)$. Тогда в пространстве Минковского можно образовать векторный потенциал:

$$A(x) = \frac{\partial g_z(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_z(x)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial g_z(x)}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial g_z(x)}{\partial t} dt, \tag{4.6}$$

который, так воздействует на движение топологической особенности, что финслерова длина ее траектории по пути l (заданном в пространстве Минковского) при $A(x) = 0$ равная величине:

$$S = \int_l m|dx|, \tag{4.7}$$

при $A(x) \neq 0$ должна быть скорректирована с учетом равенства компоненты $\dot{X}_z$ скорости ее движения и компоненты $g_z(x)$ внешнего поля скоростей:

$$S = \int_l m|dx| + \int_l (eA^*(x), dx), \tag{4.8}$$

где e – является параметром собственного векторного потенциала особенности. А поскольку из всех возможных путей топологическая особенность движется по тому пути, который обеспечивает наименьшую длину ее траектории, то мы получили полную аналогию с движением заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Допустим теперь, что в векторном потенциале $A(x)$ все компоненты кроме нулевой равны нулю. Тогда для длины траектории топологической особенности справедливо выражение

$$S = \int_0^t m\sqrt{1-v^2}dt + \int_0^t eA_0^*(x)dt, \tag{4.9}$$

где $v = \frac{dx}{dt}$, и следовательно имеет место формула:

$$\frac{dS}{dt} = m\sqrt{1-v^2} + eA_0^*(x), \tag{4.10}$$

которая при малых скоростях приводится к виду:

$$L = \frac{dS}{dt} = \frac{mv^2}{2} - U(x), \tag{4.11}$$

где $U(x) = -eA_0^*(x)$, совпадающему с лагранжианом $L = \frac{dS}{dt}$ материальной точки во внешнем электрическом поле. Заметим также, что если к векторному потенциалу применить принцип минимальности квадрата его формы кривизны:

$$\delta \int d^2A^*(x)dv = 0, \tag{4.12}$$

то мы получим еще и уравнения Максвелла в пустом пространстве.

Обратимся теперь к тем свойствам нашей модели гравитации, которые проявляются в силу того, что цилиндрическое многообразие $\mathbb{R}^3 \times S^1$ расширено до пространства $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^1$. Вследствие такого расширения, произвольная линейная траектория особенности, имеющая длину l, наматывается на соответствующую окружность Вилларсо многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^1$ в соответствии с формулой:

$$\Psi(l) = e^{i\frac{\pi}{h}l}, \tag{4.13}$$

где h – длина окружности Вилларсо. Прежде всего заметим, что переход от описания траектории особенности к описанию конгруэнции траекторий влечет за собой обогащение модели новыми свойствами. Действительно, если в пространстве Минковского финслерова длина траектории особенности вычисляется по формуле $l = |p|\tau$, где p – 4-импульс, а τ – собственное (абсолютное) время движения особенности, то финслерова длина конгруэнции траекторий особенности, заданных 4-импульсом p, вычисляется по формуле $l(x) = px$, где $l(x)$ – финслерова длина отрезка траектории конгруэнции, соединяющей между собой точку x пространства Минковского и его подпространство $px = 0$, которое задает нулевое ортогональное сечение конгруэнции. А поскольку каждая траектория этой конгруэнции отображается на окружность Вилларсо в соответствии с формулой

$$\Psi(x) = e^{i\frac{\pi}{\hbar}px}, \tag{4.14}$$

то мы получим волновую функцию особенности. Более того, если особенность находится в такой вероятностной ловушке, что ее траектория представляет собой случайную ломаную линию, то волновая функция ее конгруэнции будет иметь вид:

$$\Psi(x) = \sum c_j e^{i\frac{\pi}{\hbar}p_j x}, \tag{4.15}$$

где $\sum |c_j|^2 = 1$ и $|c_j|$ имеет значение весового коэффициента в статистической сумме.

Пусть динамика топологической особенности определяется стохастическим принципом стационарного действия, согласно которому финслерова длина траектории экстремальна только на звеньях стохастической ломаной. Тогда, для динамического описания особенности нам необходимо исследовать процесс случайного блуждания особенности на поверхности многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^1$.

Однако прежде сделаем одно математическое замечание, имеющее непосредственное отношение к этому вопросу. Пусть дана некоторая плотность распределения вероятности на прямой, т. е. такая функция $\rho(x)$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1. \tag{4.16}$$

Для случайной величины $e^{i\pi x}$, возникающей при компактификации прямой в окружность, вычислим стандартным образом матожидание

$$M(e^{i\pi x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(e^{i\pi x})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi x}\rho(x)dx = pe^{i\pi\alpha}. \tag{4.17}$$

Тогда величина $pe^{i\pi\alpha}$, которую мы назовем комплексной амплитудой вероятности, содержит в себе две характеристики распределения случайной величины, а именно, матожидание $e^{i\pi\alpha}$ как таковое и сосредоточенность p плотности распределения; т. е., интенсивность матожидания. Действительно, если $\rho(x) = \delta(\alpha)$, то $M(e^{i\pi x}) = 1 \cdot e^{i\pi\alpha}$, если же $\rho(x)$ имеет равновероятное распределение по всей прямой, то $M(e^{i\pi x}) = 0$.

Итак, какие траектории особенности $X(\tau)$ реализуются в пространстве Минковского, которое наматывается на поверхность многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, мы применим процедуру, восходящую к Фейнману. Пусть вероятностное поведение особенности описывается марковским процессом случайного блуждания на поверхности многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$, в котором элементарным событием является свободный пробег. В пространстве $\mathbb{R}^{1,3}$ этому случайному событию соответствует случайное время свободного пробега $\Delta\tau$ и случайный вектор свободного пробега $\Delta X = (\Delta x, \Delta t)$, где Δx – его проекция в евклидовом пространстве наблюдателя, Δt – его проекция на ось времени наблюдателя, а отношение двух случайных величин $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ формирует случайнй вектор скорости свободного пробега v. Вместе с тем, для событий, которые происходят на поверхности многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^1$, свободному пробегу особенности соответствует такая случайная величина как фазовая длина свободного пробега особенности:

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{h} m \Delta\tau(x) = \frac{\pi}{h} L(x) \Delta t. \tag{4.18}$$

Кроме того, пусть распределение плотности вероятности случайной величины $\Delta\phi$ подчинено закону, который без учета нормировочного множителя выражается показательной формулой $\rho(\Delta\phi) = e^{-\Delta\phi}$, а следовательно для случайной величины $e^{i\Delta\phi}$ мы будем иметь соответствующую плотность вероятности

$$\rho(e^{i\Delta\phi}) = e^{-\Delta\phi} e^{i\Delta\phi}. \tag{4.19}$$

Откуда, с учетом свойств марковского процесса, получим плотность вероятности, реализуемой за произвольное число случайных блужданий, а именно:

$$\rho(e^{i\phi}) = \prod_{0}^{t} e^{-\frac{\pi}{h} L(x)\Delta t} e^{i\frac{\pi}{h} L(x)\Delta t} = \exp\left(-\frac{\pi}{h}\int_0^t L(x)dt\right)\exp\left(\frac{i\pi}{h}\int_0^t L(x)dt\right). \tag{4.20}$$

Для получения математического ожидания случайной величины $e^{i\phi}$ необходимо еще просуммировать по всем возможным траекториям, т.е. вычислить величину

$$M(e^{i\phi}) = \sum \exp\left(-\frac{\pi}{h}\int_0^t L(x)dt\right)\exp\left(\frac{i\pi}{h}\int_0^t L(x)dt\right). \tag{4.21}$$

Если теперь принять во внимание, что на больших интервалах времени всякая ненулевая вариация длины траектории особенности имеет почти нулевую интенсивность переходной вероятности такого события, в то время как нулевая вариация дает ненулевую интенсивность, то отсюда следует, что длина траектории особенности должна быть минимальной. Таким образом, в случае большого интервала времени, особенность имеет определенную траекторию, являющуюся решением вариационного уравнения, которое в классической механике определяет динамическое поведение материальной точки. В свою очередь, если $\Psi(x,t)$ это функция конгруэнции особенности, чей модуль имеет значение плотности вероятности нахождения особенности на траектории, пересекающей точку (x,t), а фаза имеет значение фазовой финслеровой длины этой траектории, то эволюция функции $\Psi(x,t_0)$ определяется интегральным уравнением

$$\Psi(x,t) = \int M(e^{i\phi})\Psi(x,0)dx^3, \tag{4.22}$$

которое эквивалентно дифференциальному уравнению Шредингера, описывающему эволюцию волновой функции квантовой частицы.

5 Заключение

Итак, нами предпринята попытка описания динамики пространства–времени и частиц с помощью динамики векторного поля многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^1$, которая задается принципом максимума массы потока этого поля. Сравнение следствий нашей модели с фундаментальными физическими принципами позволяет сделать вывод о том, что мы нашли свой путь в многочисленных подходах к объединению теории тяготения и квантовой теории. Вместе с тем, следует отметить, что эта статья имеет методологический характер, а новые (неожиданные с физической точки зрения) свойства модели могут открыться только на многообразии высшей размерности. В этой связи было бы интересно изучить динамику минимального единичного векторного поля пространства семимерной сферы S^7.

Список литературы

[1] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, Уравнения математической физики, М., 2000.

[2] Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, М., 2002.

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика.

[4] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967.

[5] Birkhoff G. D., Flat space–time and gravitation, 1944, Proc. Nat. Acad. Sci., v. 30 No. 10.

[6] O. Klein, Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie, Zeits. Phys. 37 (1926) 895.

[7] Ю.Б. Румер, Действие как координата пространства (I-IX)-ЖЭТФ, 1949, т.19